# Paris Harrington原理とその周辺(数学基礎論及びその応用)

AUTHOR(S):

倉田, 令二朗

CITATION:

倉田, 令二朗. Paris Harrington原理とその周辺(数学基礎論及びその応用). 数理解析研究所講究録 1984, 540: 91-107

ISSUE DATE:

1984-10

URL:

http://hdl.handle.net/2433/98743

数理解析研究所講究録
540巻 1984年 91-107



# Paris Harrington原理とその周辺

九大工学部　倉田令二朗（Reijiro Kurata）

以下ではParis Harrington原理PHとその拡張$PH_n$とその周辺を論ずる。周辺とはReflection Principle および$\varepsilon_0$-帰納法のことである。ただし考察の範囲は1st order logic内に限定される。

## I　Paris Harrington原理

1. <u>定義</u>　$M, e \in \omega$, Mは$\{0,1,\cdots M-1\}$と同一視される。

$[M]^e = \{ X \,;\, X \subseteq M,\ \bar{\bar{X}} = e \}$

Partitionとはmap $P : [M]^e \longrightarrow r\ (=\{0,1,2\cdots r-1\})$ のこと。

$X \subseteq M$ ; homogeneous for a Partition P とは $P \restriction [X]^e = \text{Const}$ のことである。

$M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r$　$k, e, r \in \omega\ (k > e)$ とはすべての$P : [M]^e \longrightarrow r$ に対し、次のような$X \subseteq M$が存在することである。

(i) X is homogeneous for P, (ii) $\bar{\bar{X}} \geq k$, (iii) $\bar{\bar{X}} \geq \min X$.

PH（Paris Harrington Principle とは次の命題を意味する。

$$\forall e\, r\, k\, \exists M (M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r)$$

$PH^e$ ;　$\forall r \forall k \exists M (M \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r)$

同様に $[a,b]^e \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r$ $(k>e)$ は $\forall P: [a,b]^e \to r, \exists X \subseteq [a,b]$ s.t (i) $X$ is $P$-homo (ii) $\bar{\bar{X}} \geqq k$ (iii) $\bar{\bar{X}} \geqq \min X$.

命題 PH と次の(1), (2) (3) の各は互に同値である.

(1) $\forall a k r e \exists b \left([a,b] \underset{*}{\longrightarrow} (k)^e_r\right)$

(2) $\forall x z \exists y \left([x,y] \underset{*}{\longrightarrow} (z+1)^z_z\right)$

(3) $\forall z \exists y \left([0,y] \underset{*}{\longrightarrow} (z+1)^z_z\right)$

## 2. PH は真である.

命題 (i) PH は真である. (ii) 各 $e$ に対し $PA \vdash PH^e$ である.
(iii) $PA, RFN_{\Sigma_1}(PA) \vdash PH$ ((ii)に関しては[17]参照)

説明. (i) は König lemma と Infinite Ramsey theorem を用いていえる (c.f. 2 in [1]) (ii) (i) の証明から各 $e$ に対して $PA_2 \vdash PH^e$ が得られる. ここに $PA_2$ は $PA$ の2階述語拡大, これから各 $e$ に対して $PA \vdash PH^e$, これを $PA$ の中で形式化して(iii)を得る.

## 3. Lemma

PH から導かれる諸定理のために次の補題をおくのが便利である. (von der Twer [2]) PH を仮定する.

与えられた $a, e\ p, k\ (>e)$ から primitive recursive function $g$ に対し次のような $b$ が存在する; 任意の $P: [a\ b]^e \to 2$ に対し $X \subseteq [a,b]$ が存在して次をみたす (i) $X$ is $P$-homo, (ii) $\bar{\bar{X}} \geqq k$ (iii) $\min X \geqq p$, iv) $\bar{\bar{X}} \geqq g(\min X)$, (v) $x, y \in X, x<y \Rightarrow g(x) < y$

## 4. Theory T

T の言語：　$0, 1, +, \cdot, <$, および無限個の constants $c_0, c_1, \cdots$

T の公理　(i) $0, 1, +, \cdot, <$ の定義式と limited formula に対する induction　(ii) $c_i^2 < c_{i+1}$

(iii) 任意の limited formula $\varphi(y_1 \cdots y_m, z_1, \cdots, z_e)$ と $i < k_1 < \cdots < k_e$, $i < k_1' < \cdots < k_e'$ に対し $\forall \vec{y} < c_i[\varphi(\vec{y}, c_{k_1} \cdots c_{k_e}) \leftrightarrow \varphi(\vec{y}, c_{k_1'} \cdots c_{k_e'})]$

Theory T は Harrington によって導入されたがこれによって PH 原理の証明論的扱いが可能となった.

<u>定義</u>　$\varphi :\equiv Q_0 x_0 \cdots Q_{n-1} x_{n-1} \psi(x_0 \cdots x_{n-1})$ を PA の $\Sigma_n$ または $\Pi_n$ formula とする. $\psi$ は PR-formula ([6]) である. このとき $\varphi^*$ を定義する; $\varphi^*(z_0 \cdots z_{n-1}) :\equiv Q_0 x_0 < z_0 \cdots Q_{n-1} x_{n-1} < z_{n-1} \psi(x_0 \cdots x_{n-1})$

ただし $z_0 \cdots z_{n-1}$ は $\varphi$ にない variable とする.

<u>命題</u>(Uesu)　$\theta(\vec{y}) :\equiv \theta(y_1 \cdots y_m)$ は $\Pi_n$ 又は $\Sigma_n$-formula とし $y_1, \cdots, y_m$ 以外の自由変項はあらわれないとする

$PA \vdash \theta(\vec{y})$　$i < k_1 < \cdots < k_n$ ならば $T \vdash \vec{y} < c_i \to \theta^*(\vec{y}, c_{k_1} \cdots c_{k_n})$

これは[1]の2.4に対応するが証明論的証明は上江州による(奥村[5] 2.2 にある).

<u>系</u>　$PA \vdash \mathrm{Con}\,T \to \mathrm{Con}\,PA$

5.　$PA \vdash \mathrm{Con}\,PA \to \mathrm{Con}\,T$　$PA \nvdash PH$

[1]では PA, PH $\Rightarrow \vdash \mathrm{Con}\,T$ を導き上の系から $PA \nvdash PH$ を導いているがもう少し精密な結果が得られる

<u>定義</u>　$S = S(c_0 \cdots c_{k-1})$ は T の文で T の constants は $\{c_0 \cdots c_{k-1}\}$

にあらわれるとする。 $\hat{S} := \exists x_0 \cdots \exists x_{n-1} S(x_0 \cdots x_{n-1})$ とおく。

$FS_T(x)$ は "$x$ は $T$ の有限個の公理の conjunction のゲーデル数である" をあらわす formula, $FC_\omega(T)$ は "$T$ のすべてのすべての有限部分集合は $\omega$ 上 satisfiable である" をあらわす formula とする。

すなわち $FC_\omega(T) := \forall x(FS_T(x) \to Tr_{\Sigma_2}(\hat{x}))$ ($T$ の公理は $\Sigma_2$-型)

Lemma (1) $S = S(c_0 \cdots c_{n-1})$ は $T$ の有限部分集合とする。

そのときある $d$ があって $PH^d \Rightarrow \hat{S}$ は真

(2) 上の $S$ に対し $PA \vdash \hat{S}$

(3) $PA \vdash PH \to FC_\omega(T)$

<u>Theorem</u> (1) $PA \nvdash PH$, (2) $PA \vdash Con\,PA \to Con\,T$ ($\therefore Con PA \leftrightarrow Con T$)

(1) が [1] の主要結果の一つである。 $PA \vdash PH \xrightarrow{\text{lemma 3}} FC_\omega(T) \to Con\,T \xrightarrow{\text{prop 4}} Con\,PA$ より出る。 (2) は Lemma (2) から出る。

## 6. $PH \leftrightarrow RFN_{\Sigma_1}(PA)$ 等

<u>定義</u> $PA(n) := PA + Th_{\Pi_n}(\mathbb{N})$ ($= \{\text{true } \Pi_n\text{-sentences}\}$)

<u>Theorem</u> $PH$, $FC_\omega(T)$, $Con(PA(1))$, $RFN_{\Sigma_1}$ は $PA$ で同値である。

[証明] $PH \xrightarrow{(1)} FC_\omega(T) \xrightarrow{(2)} Con(PA(1)) \xrightarrow{(3)} RFN_{\Sigma_1}^{G} \xrightarrow{(4)} RFN_{\Sigma_1} \xrightarrow{(5)} PH$

(1) は lemma 4 (3), (3)(4) は次章, (5) は Prop. 2 (iii)

(2) は informal には次のようにしてわかる。 $FC_\omega(T)$ を仮定し

$PA \vdash \theta_1 \cdots \theta_n \to \curlywedge$ ($\theta_i$ は true $\Pi_1$ sentences) とする。 そのとき $T \vdash \theta_1^*, \cdots \theta_n^* \to \curlywedge$

(Prop 4) $\theta_1^* \cdots \theta_n^*$ は satisfiable on $\omega$ ($\theta_i = \forall x \psi_i(x)$ なら $\theta_i^* := \forall x < c_0 \psi_i(x)$)

これは $FC_\omega(T)$ に矛盾する。

系 PA(1) $\nvdash$ PH

## 7. モデル論的方法

[2], [3]等のモデル論的方法では基本的に次の lemma を必要にする.

Lemma $M$ を countable nonstandard model of PA とする.

$c > \mathbb{N}$ に対し. $M \models [a,b] \underset{*}{\longrightarrow} (c+1)^c_c$ なら sequence $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $e_i \in [a,b)$ が存在して $(M, (e_i)_{i\in\mathbb{N}}) \models T$. $\quad a < I < b$

$I = \{d \in M \,;\, \exists i \in \mathbb{N}\ d < e_i\}$ とおけば $I \subseteq_e M$ (end extension) かつ $I \models PA$, また この場合 $I \subseteq_{\Sigma_0} M$, すなわち $\Sigma_0$-formula $\varphi$ と $\vec{a} \in I$ に対し $I \models \varphi(\vec{a}) \Longleftrightarrow M \models \varphi(\vec{a})$ (2.3 (ii) [2])

PA(1) $\nvdash$ PH のモデル論的証明; $M \models Th(\mathbb{N})$ とする. $a \in M \setminus \mathbb{N}$. $\mathbb{N} \models PH$ だから $M \models [a,b] \underset{*}{\longrightarrow} (a+1)^a_a$ となる最小の $b \in M$ がある. 上の lemma によって $I \subseteq_e M$ を作る. $I \models PA$ $I \models Th_{\Pi_1}(\mathbb{N})$ $a < I < b$. もし PA(1) $\vdash$ PH なら $b' \in I$ があって $I \models [a,b'] \underset{*}{\longrightarrow} (a+1)^a_a$ このときは $M \models [a,b'] \underset{*}{\longrightarrow} (a+1)^a_a$ ($I \subseteq_{\Sigma_0} M$) これは $b$ の最小性に矛盾する.

## 8 Provably recursive function

$f(a) = \mu b\left([a,b] \underset{*}{\longrightarrow} (a+1)^a_a\right)$ とおけば これは recursive

Theorem $g$ が provably recursive in PA ならば $f$ は $g$ を dominate する. すなわち $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}\ (m \geq n \to f(m) > g(m))$

この model 論的証明はきわめて簡単である (c.f [2]). [1] にも

あるが命題1の PH ↔ (2) を明確にしてないのであいまいである。証明論的証明はむつかしい。これは事実上 Ketonen Solovey [16] にある。

von der Twer は [2] の序で「PA における証明の概念を完全に抹殺した」と述べているが、奥村 [5]，小野.角田 [17] 倉田 [4] はいずれも「モデルの概念を完全に抹殺した」と述べている。

9. $T_n$, $T_\infty$ についての注意

<u>定義</u> Theory $T_n$ ($n=0,1\cdots$) ないし $T_\infty$ は T の公理 (i) (iii) の limited formula を $\Pi_n$-formula ないしは任意の formula でおきかえて得られるものとする。 $FC_\omega(T_n)$ は PA の文になるが次が成立つ。

(1) $T_\infty$ は PA の conservative extension である。

(2) $PA \vdash Con\,PA \leftrightarrow Con\,T_n \leftrightarrow Con\,T_\infty$

(3) $PA \vdash PH \leftrightarrow FC_\omega(T_n)$

したがって $\{Con(T_n)\}_{n\in\omega}$ も $\{FC_\omega(T_n)\}_{n\in\omega}$ も $RFN_{\Sigma_n}(PA)$ ($n=1,2\cdots$) に対応する hierarchy を与えることはできない。

## II Reflection Principle と PH の拡張 $PH_n$

### 10. Reflection principle

$Rfn(PA)$ (local reflection principle) $Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \varphi$, $\varphi$ は文 (PA の)。

$RFN(PA)$ (uniform reflection P.) $\forall x\, Pr_{PA}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \forall x\, \varphi(x)$

$RFN'(PA)$ (second uniform r. P.) $\forall x\,[Pr_{PA}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner) \to \varphi(x)]$

ここに $\varphi$ は $x$ のみを free にもつ. $\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner$ は $\ulcorner\varphi(\bar{x})\urcorner$ すなわち $s(\ulcorner\varphi\urcorner, x)$ の formal expression.

$Rfn_{\Sigma_k(\Pi_k)}(PA)$, $RFN_{\Sigma_k(\Pi_k)}(PA)$, $RFN_{\Sigma_k(\Pi_k)}(PA)$ は $Rfn$, $RFN$ $RFN'$ の $\varphi$ を $\Sigma_k(\Pi_k)$-sentence or formula に制限したもの.

$RFN^G_{\Sigma_k(\Pi_k)}$ (Global Reflection Principle) :=

$$\forall x\,(St_{\Sigma_k(\Pi_k)}(x) \wedge Pr_{PA}(x) \to Tr_{\Sigma_k(\Pi_k)}(x))$$

<u>Prop</u> (1) $PA \vdash RFN^G_{\Sigma_k(\Pi_k)} \to RFN'_{\Sigma_k(\Pi_k)}$

(2) $PA \vdash RFN^G_{\Sigma_k} \leftrightarrow Con(PA(k))$

$$PA(k) = PA + Th_{\Pi_k}(N)$$

(2) $RFN^G_{\Sigma_k}(PA) \Longleftrightarrow \forall\varphi\in\Sigma_k(Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to Tr_{\Sigma_k}(\ulcorner\varphi\urcorner))$

$\Longleftrightarrow \forall\varphi\in\Sigma_k(\neg Tr_{\Sigma_k}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg Pr_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner))$

$\Longleftrightarrow \forall\varphi\in\Pi_k(Tr_{\Pi_k}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to \neg Pr_{PA}(\ulcorner\neg\varphi\urcorner)) \Longleftrightarrow Con(PA(k))$

<u>Theorem</u> ([6]) (i) $PA \vdash Con_{PA} \leftrightarrow RFN_{\Pi_1}(PA)$

(ii) $PA \vdash RFN_{\Sigma_k(\Pi_k)} \leftrightarrow RFN'_{\Sigma_k(\Pi_k)}$

(iii) $PA \vdash RFN_{\Pi_{k+1}}(PA) \leftrightarrow RFN_{\Sigma_k}(PA)$ $k \geqq 0$

(iv) $PA + RFN_{\Pi_k} \nvdash RFN_{\Sigma_k}$ $k \geqq 1$

( $PA + RFN_{\Pi_k}$ の consistent を仮定に

(iii) (iv) によって $RFN_{\Sigma_k}$ ($k = 1, 2 \cdots$ ) は hierarchy を作る.

$PH \leftrightarrow RFN_{\Sigma_1}$ in PA だったから $PH_n \leftrightarrow RFN_{\Sigma_n}$ in PA となるような PH の拡張 $PH_n$ が問題になる.

## 11 <u>$PH_n$ の定義</u>

(1) $\varphi$ を $\Pi_n$-sentence $\forall v_0 \exists v_1 \cdots Q v_{n-1} \psi(v_0 \cdots v_{n-1})$ — $\psi$ は PR-formula — に対し, $\varphi^*(u_0 \cdots, u_{n-1})$ は

$\forall v_0 < u_0 \exists v_1 < u_1 \cdots Q v_{n-1} < u_{n-1} \psi(v_0 \cdots v_{n-1})$ であった. ただし $u_0 \cdots u_{n-1}$ は $\varphi$ にあらわれない variable とする.

$X = \{x_0\, x_1 \cdots\}\,(x_0 < x_1 < \cdots\quad)$ と $\bar{\bar{X}} \geqslant n$ なる $\omega$ の有限部分集合とする.

$X \models_0 \varphi^* \Longleftrightarrow \varphi^*(x_0, \cdots, x_{n-1})$ is true

$X \models \varphi^* \Longleftrightarrow \varphi^*(x_{i_0} \cdots x_{i_{n-1}})$ is true for all $i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-1} < \bar{\bar{X}}$

(2) $M \xrightarrow[*]{\varphi} (k)^e_r$ $(k \geqslant n)$ $\varphi$ は $\Pi_n$-sentence が次のことを意味するものとする 任意の partition $P : [M]^e \to r$ に対し $X \subseteq M$ が存在して次をみたす. i) $X$ is homogeneous for $P$, ii) $\bar{\bar{X}} \geqslant k$ iii) $\bar{\bar{X}} \geqslant \min X$ iv) $X \models_0 \varphi^*$

(3) $PH_n$ $\forall k \geqslant n$ e, r and for all true $\Pi_n$-sentence $\varphi$, $M$ が存在して $M \xrightarrow[*]{\varphi} (k)^e_r$

<u>Prop 1</u> $PH_n$ は $\Pi_{n+1}$-sentence である.

$\Pi_n$-formula $\tau_n(x)$ が存在し任意の $\Pi_n$-sentence $\varphi$ に対し数 $p$ が存在して $\tau_n(p) \longleftrightarrow \varphi$ となる. この $\tau_n(p)$ を用いて

$PH_n$ は $\forall k \geqslant n\, \forall r\, \forall e\, \forall p\, [\tau_n(p) \longrightarrow \exists M (M \xrightarrow[*]{\tau_n(p)} (k)^e_r\,]$

<u>Prop 2</u> $PH_n$ は次の(1)(2)(3)の各と同値である.

(1) $\forall$ true $\Pi_n$-$\varphi$ $\forall a\, \forall k\, r, e\, \exists b ([a, b] \xrightarrow[*]{\varphi} (k)^e_r)$

(2) $\forall$ true $\Pi_n$-$\varphi$ $\forall a\, c\, \exists b ([a\, b] \xrightarrow[*]{\varphi} (c+1)^c_c$

(3) $\forall$ true $\Pi_n$-$\varphi$ $\forall a \exists b\left([0,b] \xrightarrow[*]{\varphi} (a+1)^a_a\right)$

<u>12</u> $PH_n$ is true

<u>Prop</u> (i) $PH_n$ is true

(ii) 各 $e$ に対し $PA \vdash PH_n^e$

(iii) $PA + RFN_{\Sigma_n}(PA) \to PH_n$

ここで $PH_n^e$ は $\forall k \geqslant n \forall r \forall P[\tau_n(P) \to \exists M(M \xrightarrow[*]{\tau_n(P)} (k)^e_r)]$

<u>13</u> Lemma

$PH_n$ を仮定する。 与えられた $a, e, p, k \geqslant n$, primitive recursive function $g$, true $\Pi_n$-sentence $\varphi$, に対し $b$ が存在して

$\forall P : [a\ b]^e \longrightarrow 2$, $\exists X \subseteq [a, b]$ s.t. i) $X$ is $P$-homo, ii) $\min X \geqslant p$,

iii) $\overline{\overline{X}} \geqslant k$, (iv) $g(\min X) \leqslant \overline{\overline{X}}$ v) $x, y, x<y \Rightarrow g(x)<y$

vi) $X \models_0 \varphi^*$

<u>14</u> Theory $T(n)$

$T(n)$ は 4 の $T$ に true $\Pi_n$-sentence $\varphi$ に対する $\varphi^*(c_0 \cdots c_{n-1})$ を axiom として加えたもの

<u>15</u> $FC_\omega(T(n))$

$FC_\omega(T(n))$ は $T(n)$ の有限部分集合は $\omega$ 上 satisfiable であることを表明する formula (PA の formula として書ける).

<u>Lemma</u> $S = S(c_0 \cdots c_{k-1})$ は $T$ の finite axioms の conjunction とし, constants は $c_0 \cdots c_{k-1}$ の中にあらわれるとする. $\varphi$ はある true $\Pi_n$-sentence とする.

そのとき(1) eが存在して

$PH_n^e \Rightarrow \exists x_0 \cdots \exists x_{n-1}(S(x_0 \cdots x_{n-1}) \wedge \varphi^*(x_0 \cdots x_{n-1}))$

(2) $PA \vdash \exists x_0 \cdots \exists x_{n-1}(S(x_0 \cdots x_{n-1}) \wedge \varphi^*(x_0, \cdots, x_{n-1}))$

(3) $PA \vdash PH_n \rightarrow FC_\omega(T(n))$.

16 Theorem $PH_n$, $FC_\omega(T(n))$, $Con(T(n))$, $Con(PA(n))$, $RFN^{e}_{\Sigma_n}$, $RFN_{\Sigma_n}$ はすべてPAにおいて同値である.

系 $PA(n) \nvdash PH_n$

17 Simple form of $PH_n$ (van der Twer, Vesu)

$k \geq m$, $e$, $r$, $M \in \omega$, $f: \omega \rightarrow \omega$ とする.

$M \xrightarrow[*]{f} (k)^e_r$ は次のことを意味するとする. $\forall P: [M]^e \rightarrow r$ $\exists X \subseteq M$ s.t. (i) $X$ is homo for $P$, ii) $\bar{\bar{X}} \geq k$, iii) $\bar{\bar{X}} \geq f(\min X)$)

$PH(f) := \forall k\, e\, r\, \exists M(M \xrightarrow[*]{f} (k)^e_r$

Theorem $f_n$は単調増大$\Delta_n$-functionですべての$\Delta_n$-functionをdominateするとする($n \geq 1$). そのとき

$PA \vdash PH(f_n) \longleftrightarrow PH_n$ (cf. [4])

系1. $f_n$は上と同じとするとき $PA(n) \nvdash PH(f_n)$

(van der Twer [2], 4.5

PHをPH($f_n$)に拡張し系1を証明した最初の人はvan der Twerであった. 倉田は独立に$PH_n$を見出しTheorem 16を証明した(van der TwerにはRFNと関連づける意図がなかったようである) 上江州は[2]を知らずに$PH_n$が上記のPH($f_n$)

と同値であることを倉田に示唆した。

<u>系2</u> RFN(PA) $\Longleftrightarrow$ すべての単調増大算術的関数 $f$ に対し $PH(f)$ が成立つ

III RFN(PA) と $\varepsilon_0$-Induction

<u>18</u> RFN $\rightarrow$ Ind $\varepsilon_0$

<u>定義</u> $Ind(n, \varphi)$ : $\omega_n$ までの transfinite induction が PA の formula $\varphi$ に対して成立つことを言明する PA の formula. すなわち

$$\forall x(\forall y \underset{n}{<} x\, \varphi(y) \rightarrow \varphi(x)) \rightarrow \forall x\, \varphi(x)$$ (cf. [8]

$Ind(\varepsilon_0, \varphi) := \forall x\, Ind(x, \varphi)$, $Ind\,\varepsilon_0$ ; $Ind(\varepsilon_0 \varphi)$ for every $\varphi$.

<u>Prop</u> PA $\vdash$ RFN $\rightarrow$ Ind $\varepsilon_0$

実際.. PA の任意の formula $\varphi(x)$ と任意の $n$ に対し

$PA \vdash Ind(n, \varphi)$ ([7], [8], [9] [10])

上のことを PA で形式化して $PA \vdash \forall x\, Pr_{PA}(\ulcorner Ind(\dot{x}\, \varphi) \urcorner)$.

<u>19</u> Ind$\varepsilon_0$ $\rightarrow$ RFN (1st proof)

$PA^\omega$: axiom は true quantifier free formula of PA
inference rule は LK のそれ + $\omega$-rule とする.

$\varphi(x)$ を $x$ 以外 free var. をもたない PA の formula とする.

$PA \vdash \varphi(\bar{x}) \Rightarrow PA^\omega \vdash \varphi(\bar{x}) \Rightarrow PA^\omega \vdash \varphi(\bar{x})$ (カットなし, ここで Ind$\varepsilon_0$ を用いる) $\Rightarrow \varphi(\bar{x})$ is true, これを PA で形式化して

$$PA + Ind\,\varepsilon_0 \vdash Pr_{PA}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow Tr_p(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner)$$

$$〃 \quad \vdash Pr_{PA}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \rightarrow \varphi(x)$$

ここで p は $\varphi(x)$ の unbounded quantifier の数．

(cf. Schwichtenberg [15])

<u>20</u> $\mathrm{Ind}_{\varepsilon_0} \to \mathrm{RFN}(PA)$ (2nd Proof)

$\varphi(x) := \exists x_1 \forall y_1 \cdots \exists x_n \forall y_n \psi(x, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$ $\psi \in \Sigma_0$

とします．次のように $\varphi_H(x)$ を定義すれば $\varphi(x) \to \varphi_H(x)$ in LK である．

$\varphi_H(x) := \exists x_1 \cdots \exists x_n \psi(x, x_1 \cdots x_n, f_1(x_1) \cdots f_n(x_1 \cdots x_n))$

No counter example interpretation by functional $F_1 \cdots F_n$ を

$\varphi^N(x) := \varphi^N(x, F_1 \cdots F_n)$

$= \psi(x, \overline{F_1} \cdots \overline{F_n}, f_1(\overline{F_1}) \cdots f_n(\overline{F_1} \cdots \overline{F_n}))$ で定める．

ここに $\overline{F_i} = F_i(x, f_1 \cdots f_n)$ (Kreisel [11])．

さて $PA \vdash \varphi(\bar{x})$ (このときは $PA \vdash \varphi_H(\bar{x})$)

Hilbert's Substitution method によって $\varphi_H(\bar{x})$ の証明から functional $F_1 \cdots F_n$ を構成することができて $\varphi^N(x\ F_1 \cdots F_n)$ が成立つことが $\varepsilon_0$-induction を用いて証明される (Ackermann [12] Tait [13])

このことを形式化すると

Prop (1) x のみを free にもつ任意の formula $\varphi(x)$ と $\varphi(\bar{x})$ の証明 p に対し．Functional $F_1, \cdots F_n$ ($\overline{F_1} \cdots \overline{F_n}$ は $PA'$ の term) が存在して $PA' + \mathrm{Ind}'\varepsilon_0 \vdash \mathrm{Prf}_{PA}(\ulcorner\varphi(\dot{x})\urcorner, p) \to \varphi^N(x, F_1 \cdots F_n)$ (＊)

ここで $PA'$ は PA に free function $f_1, \cdots, f_n$ と pr. symbol を付加したもの

$\mathrm{Ind}'\varepsilon_0$ は $PA'$ の formula に対する $\varepsilon_0$-induction

prop (2) $PA'$ の term $e_1 \cdots e_n$ があって

$PA' \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \psi(x_1 \cdots x_n, e_1(x_1) \cdots e_n(x_1 \cdots x_n)) \to \varphi(x)$

たとえば $e_1(x_1) = \mu y_1 \neg \exists x_2 \forall y_2 \cdots \exists x_n \forall y_n \psi(x, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$

$e_2(x_1 x_2) = \mu y_2 \neg \exists x_3 \forall y_3 \cdots \exists x_n \forall y_n \psi(x, x_1 \cdots x_n, y_1 \cdots y_n)$

$\cdots\cdots$ とすればよい。

(*) における $\varphi^N(x, F_1 \cdots F_n)$ の $f_1 \cdots f_n$ を $e_1 \cdots e_n$ でおきかえ prop (2) を用いれば

$$PA' + Ind'\varepsilon_0 \vdash Pr_{PA}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \varphi(x)$$

を得るが $PA' + Ind'\varepsilon_0$ は $PA + Ind\,\varepsilon_0$ の conservative extension だから

$$PA + Ind\,\varepsilon_0 \vdash Pr_{PA}(\ulcorner \varphi(\dot{x}) \urcorner) \to \varphi(x)$$

以上は Kreisel-Lévy [14] の証明である。

Theorem $PA \vdash RFN(PA) \leftrightarrow Ind\,\varepsilon_0$

## IV $PH_n$ $n=1,2 \cdots$ と $Ind\,\varepsilon_0$

$PH_n$ は RFN から証明され RFN は $Ind\,\varepsilon_0$ から証明されるのであるから $PH_n$ は $Ind\,\varepsilon_0$ から証明される筈である。この直接証明は事実上 Ketonen-Solovay ([17]) にある。以下それを整理しよう。

1. $\lambda \leq \varepsilon_0$, $n \in \omega$ に対する $\{\lambda\}(n)$

$\lambda < \varepsilon_0$ に対し $\lambda = \omega^{\alpha_1} m_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} m_k$ を $\lambda$ の Cantor normal form とする。ここに $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$ $m_i$ は正整数。

$\lambda = \omega^{\alpha}(\beta+1)$ と書ける

(1) $\lambda = \omega^{\alpha+1}(\beta+1)$ なら $\{\lambda\}(n) = \omega^{\alpha+1} \cdot \beta + \omega^{\alpha} \cdot n$

(2) $\lambda=\omega^{\gamma}(\beta+1)$ $\gamma<\lambda$ が limit なら $\{\lambda\}(n)=\omega^{\gamma}\cdot\beta+\omega^{\{\gamma\}(n)}$

(3) $\lambda=\varepsilon_0$ なら $\{\varepsilon_0\}(0)=\omega$ $\{\varepsilon_0\}(n+1)=\omega^{\{\varepsilon_0\}(n)}$

(4) $\{\beta+1\}(n)=\beta$, $\{0\}(n)=0$

次が成立つ. $0<\alpha\leqq\varepsilon_0 \Rightarrow \{\alpha\}(n)<\alpha$, $\lim_{n\to\infty}\{\alpha\}(n)=\alpha$.

2. $\alpha$-large set

$\alpha\leqslant\varepsilon_0$ $S=\langle s_0 \cdots s_{k-1}\rangle$ を $\omega$ の finite sequence とする.

$\{\alpha\}\langle S\rangle$ を次のように定義する. $\{\alpha\}\langle\phi\rangle=\alpha$ ($\phi$ は空列)

$\{\alpha\}\langle s_0 \cdots s_{k-1}\rangle=\{\{\alpha\}\langle s_0,\cdots,s_{k-2}\rangle\}(s_{k-1})$

$\omega$ の finite set $X$ に対しては

$\{\alpha\}\langle X\rangle=\{\alpha\}\langle x_0 x_1\cdots x_{k-1}\rangle$

ここに $X=\{x_0\ x_1\cdots x_{k-1}\}$ $x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}$ とする.

定義 $X$ が $\alpha$-large とは $\{\alpha\}\langle X\rangle=0$ のこと

命題 次の性質が成立つ.

(i) $X$ が $\omega$ の無限集合ならばある $X$ の有限部分集合が $\alpha$-large となる.

(ii) $X$ が $n$-large $(n\in\omega)\Longleftrightarrow \overline{\overline{X}}\geqslant n$

(iii) $X$ が $\omega$-large $\Longleftrightarrow \overline{\overline{X}}>\min X$

(iv) $X$ が $\omega+n$-large $\Longleftrightarrow$ $X$ は relatively large かつ $\overline{\overline{X}}\geqslant n$

(v) $A\subset B$, $A$ が $\alpha$-large $\Rightarrow$ $B$ も $\alpha$-large

$F: X\to r$ があり $X$ が $\alpha\cdot r$-large $\Rightarrow \exists j\in r$, $f^{-1}(j)$ が $\alpha$-large

## 3 Ketonen Solovey's Lemma

$\alpha \geq \omega$ $2 \leq n$ $r < \omega$ に対し

$$\theta_r(\alpha) = \omega^{\alpha} + \omega^{3} + \max(r, \|\alpha\|) + 3$$ とおく.

ここに $\|\alpha\|$ は $\alpha = \omega^{\alpha_1} n_1 + \cdots + \omega^{\alpha_k} n_k$ (Cantor normal form)

のとき $\|\alpha\| = \sum_{j=1}^{k} \|\alpha_j + 1\| \cdot \cancel{n_j}^{\,n}$ によって定義される.

**Lemma**, $X$ が $\theta_r(\alpha)$-large set で $P : [X]^{n+1} \to r$ のとき

$\exists Y \subseteq X$ ; $Y$ is a $\alpha$-large prehomogeneous set, すなわち

すべての $x_0 < \cdots < x_{n-1} < y$, $x_0 < \cdots < x_{n-1} < z$ from $Y$ に対し

$$P(x_0 x_1 \ldots x_{n-1}\, y) = P(x_0 x_1 \ldots x_{n-1}\, z)$$

$\theta_r^1 = \alpha \cdot r$, $\theta_r^{n+1}(\alpha) = \theta_r(\theta_r^n(\alpha))$ $n \geq 1$ とおく. そのとき.

**Theorem** $X$ が $\theta_r^n(\alpha)$-large とする そのとき任意の partition

$P : [X]^n \to r$ は $\alpha$-large homogeneous set for $P$ をもつ.

**Corollary** $M$ が $\theta_r^n(\omega + n + 1)$-large $\Rightarrow M \underset{*}{\longrightarrow} (n+1)_r^n$

$f$ を狭義単調増大関数 : $\omega \to \omega$ とする.

$\omega$ の有限集合 $X$ が $\alpha$-large$(f)$ とは $f(X)$ が $\alpha$-large のこと

とする.

<u>**Corollary 2**</u> $M$ が $\theta_r^n(\omega + n + 1)$-large$(f)$ $\Longrightarrow$

$$M \xrightarrow[*]{f} (n+1)_r^n$$

$I\Delta\varepsilon_0$ を $PH_n$ $n = 1, 2 \cdots$ から直接証明する方法は筆者にはまだわかっていない.    1984 8.30.

## Reference


[1] Paris, J and Harrington, L : A mathematical incompleteness in Peano Arithmetic, in Handbook of Mathematical Logic, North Holland (1977).

[2] T. von der Twer : Some remarks on the mathematical incompleteness of Peano's arithmetic founded by Paris and Harrington, in Set Theory and Model Theory, M.L.N. 872 (1979).

[3] Paris, J : Some independence Results for Peano Arithmetic, in Journal of Sym. Logic vol. 43, No. 4 (1978).

[4] Kurata, R : Paris Harrington Theory and Reflection Principles, in Saitama Journal of Math. to appear.

[5] 奥村薫 : Paris Harrington 定理に関する証明論的考察 (修論).

[6] Smorynski, C : The incompleteness theorems, in Handbook of Mathematical Logic, D1, North Holland (1977)

[7] Gentzen, G : Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. Math. Annalen 119 (1943).

[8] Hilbert, D, and Bernays P : Grundlagen der Mathematik Berlin vol. II (1939).

[9] Schütte, K : Beweistheorie, Berlin (1960).

[10] Shirai, K: A relation between transfinite induction and mathematical induction in elementary number theory; in Tsukuba J. Math. vol 1 (1977).

[11] Kreisel, G: On the interpretation of non finitist proofs, J. Sym. Logic 16 (1951) and 17 (1952).

[12] Ackermann, W: Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Math. Annalen 17 (1940)

[13] Tait, W, W: The substitution method, J. Sym. Logic 30 (1965)

[14] Kreisel, G and Lévy, A: Reflection Principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems, in Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 14 (1968),

[15] Schwichtenberg, H: Proof theory, Some applications of cut elimination, D2 in Handbook of Math. Logic, North Holland (1977)

[16] Ketonen, J, and Solovay, R: Rapidly growing Ramsey functions. Annals of Math. vol 113 (1981).

[17] Ono, H and Kadota, N: Provably recursive functions in fragments of Peano arithmetic. to appear.